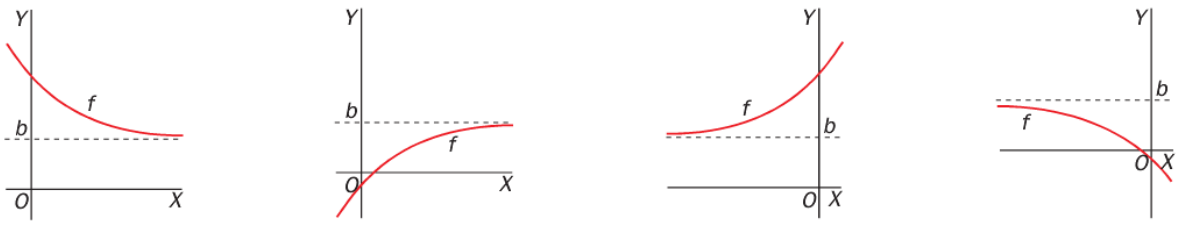
6. Asíntotas

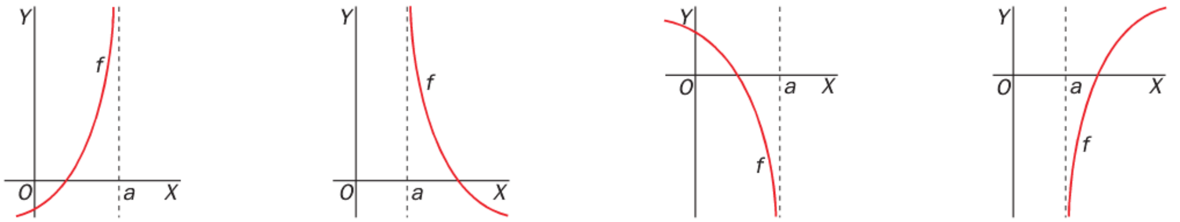
Se dice que una función $y = f(x)$ tiene una **rama infinita** cuando *x*, *f*(*x*) o ambas al mismo tiempo crecen infinitamente. De esta manera el punto $(x, f(x))$ se aleja infinitamente del origen. Una rama infinita tiene **comportamiento asintótico** cuando se aproxima a una recta. Podríamos distinguir tres posibilidades:

a) Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$, las ramas infinitas tienen comportamiento asintótico ya que se aproximan a una recta horizontal.



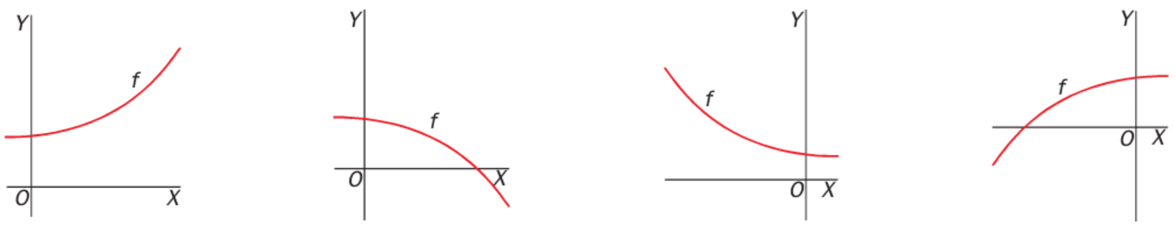
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

b) Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ las ramas infinitas presentan comportamiento asintótico, ya que se aproximan a una recta vertical.



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

c) En el caso de que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ puede haber o no comportamiento asintótico de la rama infinita según se aproxime o no a una recta oblicua.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Una asíntota es una recta cuya distancia a la curva tiende a cero cuando la distancia al origen tiende a infinito. Existen tres tipos de asíntotas: horizontales, verticales y oblicuas.

6.1. Asíntotas horizontales

Si $\underset{x\to\pm\infty}{lím} f(x)=l,$ la recta ***y = l*** es asíntota, pues la distancia $f(x)-l$ de la curva a la recta tiende a cero cuando nos alejamos del origen. La situación de la curva respecto de la asíntota la podemos estudiar calculando los límites $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-l\right]$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-l\right]$ que nos dicen si la curva está por encima (0^+) o por debajo (0^-).

Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales, correspondientes a cada uno de los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: tendríamos una asíntota hacia la izquierda y otra hacia la derecha aunque frecuentemente la misma recta es asíntota por la izquierda y por la derecha.

En funciones racionales, si hay asíntota para $x\to+\infty$, la misma recta es asíntota para $x\to-\infty$. Sin embargo, en funciones con radicales suelen ser distintas.
La gráfica de una función puede cortar a la asíntota horizontal en uno o varios puntos, aunque en la mayoría de las funciones elementales la gráfica está por encima o por debajo de la asíntota.

***Ejemplo**:* Calcular las asíntotas horizontales, si existen, de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$

Veamos si existe el límite de la función cuando $x\to\pm\infty$

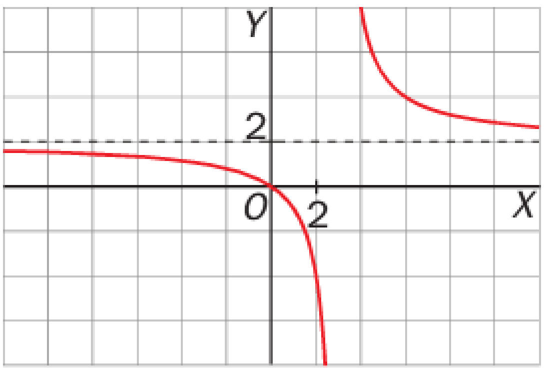
$\underset{x\to+\infty}{lím} f(x)=\underset{x\to+\infty}{lím}\dfrac{2x}{x-3}=2\Rightarrow$ La función tiene una asíntota horizontal en $+\infty$: ***y = 2***

Para estudiar si la función se acerca a la recta por encima o por debajo, se observa el signo de f(x) – 2 cuando x toma valores grandes:

$\underset{x\to+\infty}{lím}[f(x)-2]=\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\dfrac{2x}{x-3}-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x-3}=0^+\Rightarrow f(x)-2>0$ cuando x tiende a $+\infty$. Por lo tanto la función se acerca a la recta por encima.

Por otro lado, $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)=\underset{x\to-\infty}{lím}\dfrac{2x}{x-3}=2\Rightarrow$ La recta ***y = 2*** también es asíntota en $-\infty$.

En este caso f(x) se acerca a la recta por debajo, ya que $\underset{x\to+\infty}{lím}[f(x)-2]=0^-\Rightarrow f(x)-2<0$ cuando x tiende a $-\infty$.



6.2. Asíntotas verticales

La recta ***x = a*** es una ***asíntota vertical*** de la función $y = f(x)$ si se verifica que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Así pues, para calcular las asíntotas verticales de una función, si es que tiene, hay que localizar los valores finitos de la variable x que hacen tender la función a $+\infty$ o a $-\infty$.

Podríamos establecer las siguientes observaciones sobre las asíntotas verticales:

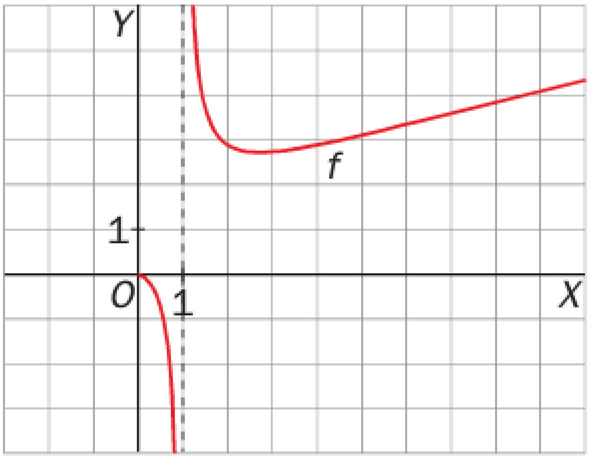
- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales. ***Ejemplo:*** $f(x) = \operatorname{tg} x$
- La gráfica de la función no corta nunca a la asíntota vertical, ya que en los puntos donde existe asíntota no está definida la función.
- En las funciones racionales, las asíntotas verticales se hallan tomando los puntos que anulan el denominador.
- La situación de la gráfica de la función respecto de la asíntota vertical $x = a$ se obtiene calculando los límites laterales en $x = a$ y viendo si valen $+\infty$ o $-\infty$.
  También puede hacerse estudiando el signo de la función en las regiones en las que existe.

Ejemplo: Encontrar las asíntotas verticales de la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

Para encontrar las asíntotas verticales de una función, buscaremos aquellos puntos donde la función tienda a infinito. Por tratarse, en nuestro caso, de una función racional, para que la imagen tienda a infinito tendremos que anular el denominador. $\ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Por lo tanto ***x = 1*** será una asíntota vertical de la función. Para estudiar la posición de la gráfica de la función respecto a la asíntota vertical debemos calcular los límites laterales en ese punto:

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$. Por lo tanto, así quedaría la gráfica:



6.3. Asíntotas oblicuas

La recta $y = mx + n$ $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de la función $y = f(x)$ si existe alguno de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(mx+n)\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(mx+n)\right)$$

En el primer caso se dice que la función tiene asíntota en -∞, y en el segundo en +∞.
Una determinada función puede tener asíntotas oblicuas de ambos tipos, de alguno o de ninguno de ellos, dependiendo de que existan los dos límites, sólo uno o ninguno.

Para obtener la pendiente *m* de la recta, se calcula el valor hacia el que tiende el cociente de *f*(*x*) por *x* cuando $x \to \pm\infty$: $\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}}$

Según el valor de *m* obtenido al calcular el límite en ±∞ pueden darse los siguientes casos:

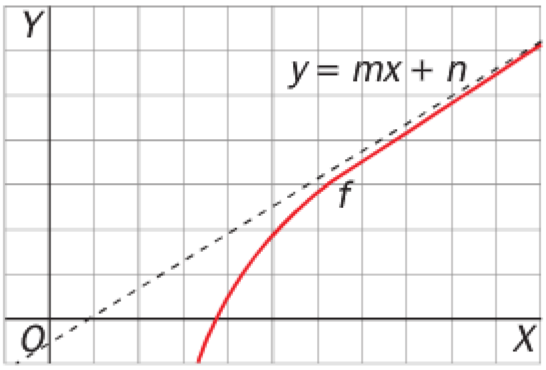
a) Si *m* es un número real no nulo, la función tiene una asíntota oblicua en +∞ (–∞).
b) Si $m = \pm\infty$, la función no tiene asíntota oblicua en +∞ (–∞) y la rama correspondiente de la misma tiene la forma de la parábola vertical $y = x^2$.
c) Si *m* = 0, la función no tiene asíntota oblicua en +∞ (–∞). La rama correspondiente tiene la forma de la parábola $y = \sqrt{x}$.

Si *m* es un número real no nulo, se calcula *n* de la forma: $\boxed{n = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]}$

Si *n* es finito, existe asíntota oblicua de ecuación $y = mx + n$.
Si *n* no es finito, hay una rama parabólica en la dirección $y = mx$.

Debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones respecto a las asíntotas oblicuas:

- Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas correspondientes a cada uno de los límites.
- Las asíntotas horizontales y las oblicuas son mutuamente excluyentes.
- La gráfica de una función puede cortar a la asíntota oblicua en uno o varios puntos.
- La situación de la gráfica respecto de la asíntota oblicua se hace estudiando el signo de $f(x)-(mx+n)$ para valores grandes de *x*.



Para conocer la posición de la gráfica respecto a la asíntota se calculan los límites:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(mx+n)\right) \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(mx+n)\right)}$$

Si el límite tiende a 0^+, la curva está encima de la asíntota y si tiende a 0^-, está debajo.

Ejemplo: Calcula las asíntotas oblicuas de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$m_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1$ $\quad n_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=0$ La asíntota sería ***y = -x***

$m_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1$ $\quad n_2 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=0$ La asíntota sería **y = x**

Para estudiar la posición de la gráfica respecto de las asíntotas habría que calcular los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-(-x)\right)=0^-$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=0^-$

Por lo tanto, la gráfica se encuentra por debajo de las asíntotas.

En las funciones racionales no es necesario utilizar límites para calcular los valores de *m* y *n* ya que se puede calcular directamente la asíntota mediante el siguiente procedimiento:

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ sin más que hacer la división entera.

Para que el grado del polinomio cociente, *C*(*x*), sea uno, la diferencia de grados entre numerador y denominador debe ser uno.

Al tender $x\to\pm\infty$, la fracción $\dfrac{R(x)}{Q(x)}\to 0$ y tendríamos que la asíntota oblicua sería $y=C(x)$.

Para conocer la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua, se hallan $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

Ejemplo: calcula las asíntotas oblicuas de la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

Haciendo la división se obtiene de cociente *x – 2* y de resto 1. Luego la asíntota oblicua es la recta $y=x-2$

Posición de la gráfica respecto de la asíntota:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0^-$, por lo tanto la gráfica está debajo de la asíntota cuando x tiende a $x\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0^+$, por lo tanto la gráfica está encima de la asíntota cuando x tiende a $x\to+\infty$